Kapitola 9

Funkce více proměnných

9.1 Vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$

Buď $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$. Prostorem $\mathbb{R}^d$ rozumíme všechny možné d–tice reálných čísel, tzn.

$$\mathbb{R}^d \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_d);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Prvky $\mathbb{R}^d$ se značí různě: tučně $\mathbf{x}$, se šipkou $\vec{x}$, nebo se píše $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Z lineární algebry víme, že $\mathbb{R}^d$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Sčítání definujeme pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ vztahem

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

a násobení $\vec{x}$ prvkem $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda\vec{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d).$$

Pak $(\mathbb{R}^d, +)$ je **Abelova grupa** s nulovým prvkem $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. V analýze ztotožňujeme prvky z $\mathbb{R}^d$ s vektory z $\mathbb{R}^d$.
Na $\mathbb{R}^d$ nemáme součin(tak jako v $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$), který by z $\mathbb{R}^d$ vytvořil algebraické těleso. Zobecněním součinu v $\mathbb{R}$ dostáváme skalární součin, který nepřiřadí dvěma prvkům z $\mathbb{R}^d$ prvek z $\mathbb{R}^d$, ale číslo.

Definice. Skalární součin
Buď $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$, pak skalárním součinem $\vec{x}$ a $\vec{y}$ rozumíme

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

(vlastnosti skalárního součinu) Platí

(S1)	$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y})$,
(S2)	$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$	$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$,
(S3)	$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$	$(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ a navíc $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Důkaz. Plyne z definice skalárního součinu a vlastností $\mathbb{R}$. Definujme zobrazení $|\cdot|_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ (tzv. *Eukleidovská norma* v $\mathbb{R}^d$) předpisem

$$|\vec{x}|_E = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Věta 9.1 ($|\vec{x}|_E$ splňuje vlastnosti normy)
Platí

(N1)	$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$	$|\vec{x}|_E \geq 0$ a $|\vec{x}|_E = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
(N2)	$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$|\lambda\vec{x}|_E = |\lambda||\vec{x}|_E$,
(N3)	$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$	$|\vec{x}+\vec{y}|_E \leq |\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E$,
(N4)	Schwarzova nerovnost	$|(\vec{x},\vec{y})|_E \leq |\vec{x}|_E|\vec{y}|_E$.

Důkaz. Vlastnosti (1) a (2) plynou z definice $(\vec{x},\vec{y})$ a (S3). Nyní ověřme (N4). Je-li $\vec{y} = \vec{0}$, pak snadno

$$(\vec{x},\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}+\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}) + (\vec{x},\vec{0}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{x},\vec{0}) = \vec{0}.$$

Je-li $\vec{y} \neq \vec{0}$, pak $|\vec{y}| \neq \vec{0}$ a platí

$$0 \leq (\vec{x}+t\vec{y},\vec{x}+t\vec{y}) = |\vec{x}|_E^2 + 2t(\vec{x},\vec{y}) + t^2|\vec{y}|_E^2 = \left(\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{y}|_E|} + t|\vec{y}|_E\right)^2 + |\vec{x}|_E^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2}.$$

Volíme-li t tak, že $\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{y}|_E} + t|\vec{y}|_E = 0$, pak dokazované tvrzení dostaneme po úpravě a odmocnění. Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně nezávislé, pak pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je $\vec{x}+t\vec{y} \neq 0$ a proto je nerovnost ostrá. Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé, tak $\vec{x} = s\vec{y}$ a platí vždy rovnost

$$|(\vec{x},\vec{y})| = (s\vec{y},\vec{y}) = |s||\vec{y}|_E^2 = |\vec{x}|_E|\vec{y}|_E.$$

Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Využijeme-li (S1), máme

$$|\vec{x}+\vec{y}|_E^2 = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y}) \leq |\vec{x}|_E^2 + 2|\vec{x}|_E|\vec{y}|_E + |\vec{y}|_E^2 = (|\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E)^2,$$

což dává nerovnost (3).

Pozorování 1. Ukažte, že skalární součin je invariantní vzhledem k otočení(které je reprezentováno maticí Q, pro kterou platí $QQ^T = I$).

Řešení. Vektory $\vec{x},\vec{y}$ se zobrazí do vektorů $\vec{x}^*,\vec{y}^*$ a využitím symetrie matice Q dostaneme

$$\begin{aligned}(\vec{x}^*,\vec{y}^*) = (Q\vec{x},Q\vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^d Q_{is}x_sQ_{ik}y_k = \\ = \textstyle\sum_{i=1}^d Q_{si}Q_{ik}y_kx_s = \delta_{sk}y_kx_s = y_kx_k = (\vec{y},\vec{x}) = (\vec{x},\vec{y}).\end{aligned}$$

Pozorování 2. Buď $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d, |\vec{x}|_E = |\vec{y}|_E = 1$. Pak vhodným pootočením lze ztotožnit $\vec{x}$ s vektorem $\underbrace{(1,0,0,\ldots,0)}_{d}$ a vektor $\vec{y}$ umístit do roviny dané vektory

$(1,0,0,\dots,0)$ a $(0,0,\dots,1)$. Pak $(\vec{x},\vec{y}) = y_1 = \cos\phi$, kde ϕ je úhel svíraný vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Pro libovolné dva vektory $\vec{u},\vec{v}$ pak máme $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|_E}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|_E} = \cos\phi$ neboli $(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}|_E|\vec{v}|_E\cos\phi$.
Pomocí normy lze definovat vzdálenost(neboli metriku)

$$\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y}) := |\vec{x}-\vec{y}|_E.$$

Věta 9.2 (vlastnosti vzdálenosti)
Platí

(M1)	$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$	$\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y})\geq 0,\ \mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y})=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{y},$
(M2)	$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$	$\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y})=\mathrm{dist}_E(\vec{y},\vec{x}),$
(M3)	$\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^d$	$\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{y})\leq\mathrm{dist}_E(\vec{x},\vec{z})+\mathrm{dist}_E(\vec{z},\vec{y}),$

Důkaz. Plyne z analogických tvrzení pro normu ve větě 9.2.

Zobecněné struktury
Pre-Hilbertův prostor neboli prostor se skalárním součinem je jakýkoliv vektorový prostor H, na kterém je definováno zobrazení(bilineární forma)

$$(\cdot,\cdot)_H : H\times H\to\mathbb{R}$$

splňující (S1) až (S3).

Příklad. Uvažujme prostor $l_2 := \{\{x_i\}_{i=1}^\infty,\ x_i\in\mathbb{R}; \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2<\infty\}$. Tento vektorový prostor je Hilbertův neboť $(x,y)_{l_2}\equiv\sum_{i=1}^\infty x_iy_i$ je skalární součin. Ověřte!

Vždy lze v pre-Hilbertově prostoru definovat normu $\|\cdot\|_H : H\to\mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$\|\vec{x}\|_H := \sqrt{(\vec{x},\vec{x})_H}.$$

Pak $\|\cdot\|_H$ splňuje vždy (N1) a (N2). Pokud se podaří ukázat platnost (N3), což obecně nelze, potom je $\|\cdot\|_H$ norma na prostoru H. Říkáme, že $\|\cdot\|_H$ je norma indukovaná skalárním součinem.

Normovaný prostor. Je to vektorový prostor X, na kterém existuje zobrazení

$$\|\cdot\|_X : X\to\mathbb{R}_0^+,$$

splňující (N1) až (N3).

Příklad. Uvaž pro $I=\langle a,b\rangle$ prostor

$$C(I)\equiv\{f:I\to\mathbb{R}^d, f \text{ spojité}\},$$

který je zřejmě vektorový prostor. Navíc $\dim C(I)=\infty$, neboť $x^k\in C(I)$ pro $k=0,1,\dots$ a $\sum_{i=0}^\infty a_ix^i=0$ pro $\forall x\in I$ implikuje $a_i=0$ a tak $1,x,\dots,x^n,\dots$ jsou lineárně nezávislé.

P ř í k l a d. Buď

$$\|f\|_{(C(I),max)} = \|f\|_\infty \equiv \max_{x\in I} |f(x)|.$$

Pak $\|f\|_\infty$ je norma a prostor $C(I)$ je normovaný. Podobně nechť

$$\|f\|_{(C(I),int)} = \|f\|_{int} \equiv \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Pak opět $\|f\|_{int}$ je norma. Ověřte!

Metrický prostor. Buď M nějaká množina objektů taková, že lze na M zavést metriku $\varrho : M \times M \to R_0^+$ splňující (M1) až (M3). Pak (M, ϱ) nazveme metrický prostor.

P ř í k l a d. Prostor $C(I)$ je metrický s metrikami

$$\varrho_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty,$$
$$\varrho_{int}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Je-li $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný prostor, pak je i metrický s metrikou $\varrho(x,y) = \|x-y\|_X$.

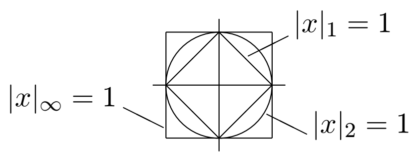
Definice. Ekvivalentnost norem
Nechť X je normovaný prostor s normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že tyto normy jsou ekvivalentní, pokud existují $C_1, C_2 > 0$ tak, že

$$\forall x \in X \qquad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

P ř í k l a d. Normy $\|f\|_\infty$ a $\|f\|_{int}$ nejsou v $C(I)$ ekvivalentní.
Definujme v $\mathbb{R}^d$ následující zobrazení pro $p \in \langle 1, \infty)$:

$$|\vec{x}|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in \langle 1, \infty),$$
$$|\vec{x}|_\infty \equiv \max_{i=1,2,\dots,d} |x_i|, \; (p = \infty).$$

Pak $|\cdot|_p$ jsou normy v $\mathbb{R}^d$(ověřte homogenitu a nezápornost, trojúhelníková nerovnost plyne z Minkovského nerovnosti, kterou za chvíli dokážeme).
Všimněme si, jak vypadají jednotkové koule v těchto normách.



Obrázek 1: Jednotkové koule $B_1^p(0)$ pro $p = 1, 2, \infty$ v $\mathbb{R}^2$.

Všimněte si také, že $|\cdot|_2 = |\cdot|_E$ (jen tato norma je generována skalárním součinem). Normě $|\cdot|_\infty$ se někdy říká supremová(maximová), zatímco $|\cdot|_1$ se nazývá součtová.
Na závěr si ukážeme tři nerovnosti, které vedou k trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|_p$.

Tvrzení . (Youngova nerovnost)
Pro $\forall a, b > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $p, q \in \langle 1, \infty)$ platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right),$$

kde poslední nerovnost plyne z konkávnosti logaritmu.

Tvrzení . (Hölderova nerovnost)
Pro $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ platí

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|_p |\vec{y}|_q,$$

což je zobecnění Schwarzovy nerovnosti.

Důkaz. Tvrzení je snadné pokud $\vec{x} = \vec{0}$ nebo $\vec{y} = \vec{0}$. Jsou-li $\vec{x}, \vec{y}$ různé od $\vec{0}$, pak

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}|_p |\vec{y}|_q} \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|}{|\vec{x}|_p} \frac{|y_i|}{|\vec{y}|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^p}{|\vec{x}|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d} \frac{|y_i|^q}{|\vec{y}|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

kde v druhé nerovnosti jsme užili Youngovy nerovnosti.

Tvrzení . (Minkowského nerovnost)
Pro $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a $p \in \langle 1, \infty)$

$$|\vec{x} + \vec{y}|_p \leq |\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p$$

Důkaz. Pro $p = 1$ a $p = \infty$ je elementární, pro $p = 2$ již byla nerovnost dokázána, předvedeme odlišný důkaz. Užijeme Hölderovu nerovnost na

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|_p^p = \textstyle\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ \leq \textstyle\sum_{i=1}^d |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^d |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ \leq \left(\textstyle\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^d |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = \\ = |\vec{x}|_p |\vec{x} + \vec{y}|_p^{p-1} + |\vec{y}|_p |\vec{x} + \vec{y}|_p^{p-1} = \\ = |\vec{x} + \vec{y}|_p^{p-1} \left(|\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p\right). \end{aligned}$$

Hölderovu nerovnost jsme užili v poslední nerovnosti.

9.2 Topologie

Definice.
Buď $\varepsilon > 0$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Pak ε-okolím bodu $\vec{x}_0$ nazveme množinu

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d; |\vec{x} - \vec{x}_0|_\infty < \varepsilon\}.$$

Všimněte si, že $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ je krychle o straně 2ε. Také $\vec{x}_0 \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ a pro každé $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ platí $U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset U_\varepsilon(\vec{x}_0)$.

Definice.
Buď $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^\mathrm{d}$. Bod $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ nazveme vnitřní bod M, pokud $\exists \varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \mathrm{M}$.

Definice. Otevřená množina
Řekneme, že $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^\mathrm{d}$ je otevřená, pokud každý bod z M je vnitřní.

Příklad. Buď $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$, $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, d$. Pak

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d;\ a_k < x_k < b_k,\ k = 1, 2, \ldots, d\}$$

je otevřená v $\mathbb{R}^d$, neboť pro libovolné $\vec{x}_0 \in Q$ položíme

$$\varepsilon = \min_{k=1,2,\ldots,d} \{|x_{0k} - a_k|, |b_k - x_{0k}|\}$$

a pak $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset Q$.

Definice. Okolí bodu
Okolím bodu $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ rozumíme libovolnou otevřenou množinu obsahující $\vec{x}_0$.

Věta 9.3
Systém všech otevřených množin v $\mathbb{R}^d$ má následující vlastnosti:

(T1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ jsou otevřené množiny,

(T2) sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina,

(T3) průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz.

(T1) Triviální.

(T2) Buď G_α otevřené množiny a $\vec{x}_0 \in \bigcup_\alpha G_\alpha$. Pak existuje $\alpha_0 \in \{1, 2, \ldots\}$ tak, že $\vec{x}_0 \in G_{\alpha_0}$. Protože G_{α_0} je otevřená, existuje $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$. Pak ale také $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$, což jsme chtěli ukázat.

(T3) Buď $\vec{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^m G_i$, G_i otevřené. Pak $\vec{x}_0 \in G_i$ pro $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ a existují $\varepsilon_i > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_i}(\vec{x}_0) \subset G_i$. Definujme

$$\varepsilon = \min_{i=1,2,\ldots,m} \varepsilon_i.$$

Pak $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$.
Pozor! $\bigcap_{i=1}^\infty G_i$ nemusí být otevřená. Volme $G_i = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d; |\vec{x}|_\infty < \frac{1}{i}\}$, pak $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{0\}$.

Topologický prostor
Buď X libovolná množina a na ní uvažujme systém τ podmnožin X takových, že

- $\emptyset, X \in \tau$,
- Jsou-li $G_\alpha \in \tau$, pak $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$,
- Jsou-li $G_i \in \tau, i = 1, 2, \ \ldots, m$, pak $\bigcap_{i=1}^m G_i \in \tau$.

Pak τ se nazývá **topologie** a (X, τ) je **topologický prostor**.

Příklad.

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ je triviální topologie.
- $\tau \nsubseteq P(X)$, kde $P(X)$ je potenční množina, neboli systém všech podmnožin X.
- v $\mathbb{R}^d$ řekneme, že topologie τ obsahuje $\emptyset, \mathbb{R}^d$ a $U_\varepsilon(\vec{x}),\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall\vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

Definice. Uzavřená množina
$M \subseteq \mathbb{R}^d$ je uzavřená, pokud $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená.

Protože platí

$$\mathbb{R}^d \setminus \bigcap_{i=1}^m G_i = \bigcup_{i=1}^m \Big(\mathbb{R}^d \setminus G_i\Big),$$
$$\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^m G_i = \bigcap_{i=1}^m \Big(\mathbb{R}^d \setminus G_i\Big),$$

můžeme zformulovat následující větu.

Věta 9.4 *
Systém všech uzavřených podmnožin $G_i,\ i = 1, 2, \ldots$ má následující vlastnosti:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ jsou uzavřené množiny,

(2) zjednocení $\bigcup_{i=1}^m G_i$ je uzavřená množina,

(3) průnik $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je uzavřená množina.

Definice. Hranice, uzávěr
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ nazveme hraničním bodem M(bodem hranice M), jestliže každé okolí má neprázdný průnik jak s M tak s $\mathbb{R}^d \setminus M$. Množinu všech hraničních bodů značíme ∂M(tzv. hranice M). Uzávěrem nazýváme $\overline{M},\ \overline{M} \equiv M \cup \partial M$.

Tvrzení. Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ libovolná, pak $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Důkaz. Protože dle definice $\overline{(\overline{M})} = \overline{M} \cup \partial\overline{M} = M \cup \partial M \cup \partial\overline{M}$ a $\overline{M} = M \cup \partial M$, stačí ukázat, že $\partial\overline{M} \subset \partial M$.
Je-li $\vec{x} \in \partial\overline{M}$, pak

(M1) $\qquad \forall U(\vec{x}) \qquad U(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset.$

Chceme ukázat, že $\vec{x} \in \partial M$, tj.

$$\text{(M2)} \qquad \forall U(\vec{x}) \qquad U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset.$$

Zřejmě z $U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$ plyne $U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$. Z $U(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ plyne existence $\vec{y} \in U(\vec{x})$ tak, že buď $\vec{y} \in M$ nebo $\vec{y} \in \partial M$. Pokud $\vec{y} \in M$ pak jsme hotovi, neboť $U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$. Je-li $\vec{y} \in M$ a také v $U(\vec{x})$, pak určitě existuje $U(\vec{y}) \subset U(\vec{x})$ tak, že $U(\vec{y}) \cap M \neq \emptyset$. Pak ale i $U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$.

Věta 9.5
Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Pak $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina v $\mathbb{R}^d$ obsahující M.

Důkaz.

- Ukážeme nejdříve, že $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ je otevřená. Kdyby ne, tak existuje $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ tak, že jakékoliv okolí $U(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$. Pak $\vec{x} \in \partial\overline{M} \subset \overline{(\overline{M})} = \overline{M}$ a máme spor, neboť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ i $\vec{x} \in \overline{M}$.

- Buď N otevřená obsahující M. Chceme ukázat, že $\overline{M} \subset N$, neboli $\partial M \subset N$ (neboť M je částí N).
  Kdyby existoval $\vec{x} \in \partial M$ a $\vec{x} \notin N$, pak

  $$\forall U(\vec{x}) \qquad U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset,$$

  ale pak také

  $$\forall U(\vec{x}) \qquad U(\vec{x}) \cap N \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus N) \neq \emptyset,$$

  což je spor, neboť N je uzavřená, tedy $\mathbb{R}^d \setminus N$ je otevřená a existuje tedy okolí $U^*(\vec{x})$, které je částí $\mathbb{R}^d \setminus N$(a $U^*(\vec{x}) \cap N \neq \emptyset$).

Definice. Vnitřek
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá vnitřek M a značí se M^0.

Věta 9.6
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak $(M^0)^0 = M^0$ a M^0 je největší otevřená podmnožina M.

Důkaz.

- M^0 je otevřená dle definice vnitřku a otevřené množiny.

- Kdyby W byla jiná otevřená podmnožina M, tak každý bod z W je vnitřní a patří tedy do M^0, $W \subset M^0$.

- $(M^0)^0$ je největší otevřená podmnožina M^0, ale M^0 je otevřená, tak musí platit $(M^0)^0 = M^0$.

P ř í k l a d. Buď Q racionální čísla. Pak $\overline{Q} = \mathbb{R}$ a $Q^0 = \emptyset$.

Věta 9.7 (Hausdorfův oddělovací axiom)
Buď $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d,\ \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$. Pak existují $U(\vec{x}_1),\ U(\vec{x}_2)$ tak, že $U(\vec{x}_1) \cap U(\vec{x}_2) = \emptyset$.

Důkaz. Položme $\varepsilon = \frac{1}{4}|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty > 0$ a $U(\vec{x}_i) = U_\varepsilon(\vec{x}_i),\ i = 1, 2$. Kdyby existovalo $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_1) \cap U_\varepsilon(\vec{x}_2)$, pak lehce odvodíme spor

$$4\varepsilon = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty = |\vec{x}_2 - \vec{x} + \vec{x} - \vec{x}_1|_\infty \le |\vec{x}_2 - \vec{x}|_\infty + |\vec{x} - \vec{x}_1|_\infty < 2\varepsilon.$$

Důsledek. (Věty 9.7)
Pro $\forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ je $\{\vec{x}_0\}$ uzavřená.

Důkaz. Buď $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ libovolné, pak dle Věty 9.7 existují $U(\vec{x}_0)$ a $U(\vec{x})$ tak, že $U(\vec{x}_0) \cap U(\vec{x}) = \emptyset$, tzn. $U(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ a $\vec{x}$ je tedy vnitřní bod $\mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$. Tedy $\mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ je otevřená a $\{\vec{x}_0\}$ je uzavřená.

Definice. Hromadný bod
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ je hromadným bodem M, pokud $\forall U(\vec{x}_0)$ existuje nekonečně bodů z M patřících do $U(\vec{x}_0)$.

Věta 9.8 (Charakterizace uzavřených množin)
$M \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená právě když M obsahuje všechny své hromadné body.

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Nechť M je uzavřená a existuje $\vec{x} \notin M$ tak, že libovolné $U(\vec{x})$ obsahuje nekonečně bodů z M. Pak ihned máme spor, neboť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus M$, což je otevřená množina. Existuje tedy okolí bodu $\vec{x}$, které celé leží v $\mathbb{R}^d \setminus M$, což je spor s definicí hromadného bodu.

- $\Leftarrow$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená. Buď $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus M$ libovolný. Protože M obsahuje všechny hromadné body, existuje $U(\vec{x})$ tak, že $U(\vec{x}) \cap M$ je nejvýše konečné. Dle důsledku Věty 9.7 tedy $U(\vec{x}) \cap M$ uzavřená. Neboli

  $$\mathbb{R}^d \setminus (U(\vec{x}) \cap M) = (\mathbb{R}^d \setminus U(\vec{x})) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)$$

  je otevřená. Protože $U(\vec{x})$ je otevřené okolí, tak

  $$U(\vec{x}) \cap \Big[(\mathbb{R}^d \setminus U(\vec{x})) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)\Big] = U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M)$$

  je otevřená a navíc částí $\mathbb{R}^d \setminus M$. Našli jsme tedy okolí $\vec{x}$ ležící celé v $\mathbb{R}^d \setminus M$. Tedy $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená.

9.3 Konvergence posloupnosti, úplnost a kompaktnost

Poznámka. Přestaneme používat šipek, budeme však důsledně psát odkud jednotlivé prvky jsou.
Konvergence posloupnosti lze definovat topologicky, metricky či v normě.

Definice.
Buď (X, τ) topologický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ konverguje k $x \in X$ právě když

$$\forall U(x),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge n_0,\ x_n \in U(x).$$

Píšeme $x_n \to x$ v X.

Definice.
Buď (M, ϱ) metrický prostor. Pak $x_n \to x$ v M právě když

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Je-li (M, ϱ) metrický a $x_n \to x$ v M, pak $\{x_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku

$$\text{(C)} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0,\ \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice. Cauchyovská posloupnost
Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, pokud (C) platí.

Příklad. Uvažujme Q s metrikou $\varrho(x, y) = |y - x|$. Pak (Q, ϱ) je metrický prostor. Definujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$ předpisem $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v Q neboť $x_n \to e$ v $\mathbb{R}$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$. Ale x_n nekonverguje v Q, neboť $e \notin Q$.

Definice. Úplný, Banachův prostor
Řekmene, že metrický prostor (M, ϱ) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost má v M limitu. Normovaný prostor M, který je úplný, se nazývá Banachův prostor.

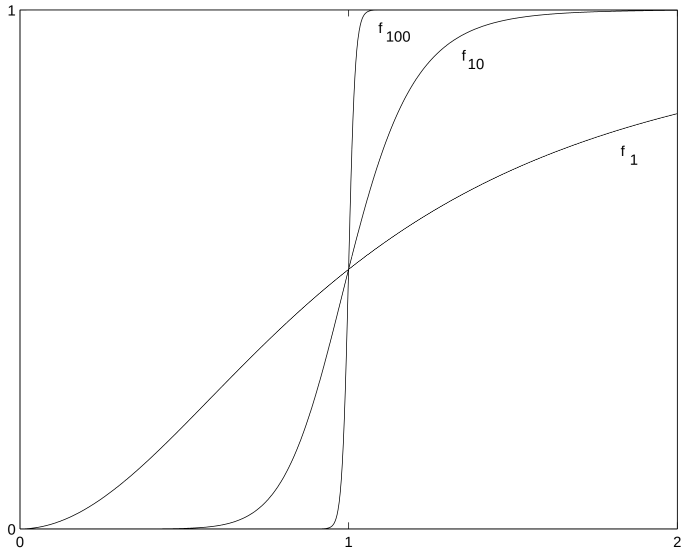
Příklad 1. Prostor $(\mathbb{R}, \varrho(x, y) = |y - x|)$ je úplný, neb B.-C. podmínka je ekvivalentní s konvergencí posloupnosti(plyne z axiomu úplnosti).

Příklad 2. Prostor $(\mathbb{R}, |y - x|_{\infty})$ je úplný, neboť je-li $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, pak $\forall \varepsilon > 0, |x^n - x^m|_{\infty} = \max_{i=1,2,\ldots,d} |x^n - x^m| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0, m \geq m_0$. Pro tyto n, m je $|x_i^n - x_i^m| < \varepsilon$, $\{x_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská v $\mathbb{R}$ a má limitu x_i^0. Pak $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_d^0)$ je hledaný prvek, ke kterému x^n konverguje. Ověřte!

Příklad 3. Prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ s maximovou normou

$$\varrho_{max}(f, g) = \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f(x) - g(x)|$$

je úplný. Základem důkazu je zjištění, že metrika $\varrho(f, g)$ je metrikou stejnoměrné konvergence. Zbytek je již snadný. Vskutku, máme-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\langle a, b\rangle)$ cauchyovskou v $C(\langle a, b\rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauychyovská v $\mathbb{R}$ a má tedy limitu, kterou označíme $f(x)$. Ale $f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a, b\rangle$ a f je tedy spojitá.



Obrázek 2: K příkladu 4.

P ř í k l a d 4. Prostor

$$(C(\langle a,b\rangle), \varrho_{int}(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| \,\mathrm{d}x)$$

není úplný. Uvažujme posloupnost funkcí(viz. obr.2)

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \; x \in \langle 0,2\rangle.$$

Posloupnost f_n je cauchyovská v uvažované integrální normě

$$\int_0^2 |f_n(x)-f_m(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left| \frac{1}{1+x^{2m}} - \frac{1}{1+x^{2n}} \right| \,\mathrm{d}x \le \int_0^2 \left| x^{2n} - x^{2m} \right| \,\mathrm{d}x \le \varepsilon,$$

pro n,m dostatečne velké. Zároveň však posloupnost f_n konverguje bodově k

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1, \\ \frac{1}{2} & x = 1, \\ 1 & x \ge 1, \end{cases}$$

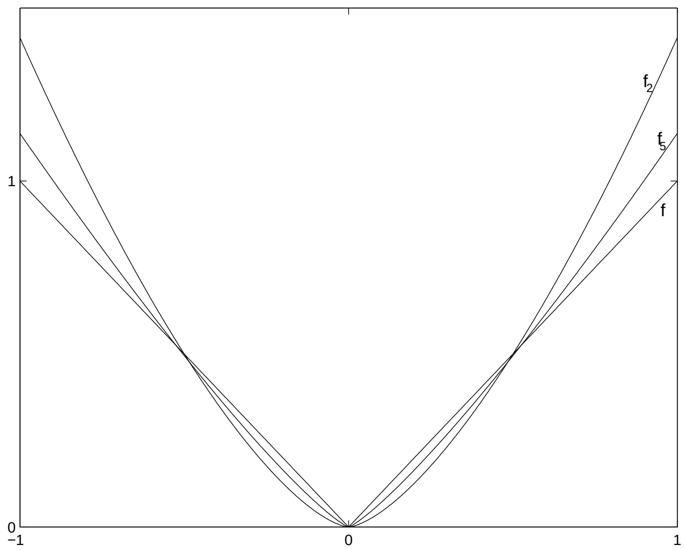
která není spojitá a tudíž nepatří do uvažovaného prostoru.

P ř í k l a d 5. Prostor spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ s metrikou

$$\varrho(f,g) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)-g(x)|$$

není úplný. Uvažme posloupnost funkcí $f_n \in C^1(\langle -1,1\rangle)$

$$f_n(x) = \sqrt[n^2]{n^2 x^{n(n+1)}}.$$



Obrázek 3: K příkladu 5.

Ověřte si, že $f_n(x) \rightrightarrows |x|$, ale $|x| \notin C^1(\langle -1, 1\rangle)$, viz obr.3.
S metrikou

$$\varrho(f,g) = \max_{x \in \langle a,b\rangle} \{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|\}$$

to však je úplný prostor.

Definice. Pokrytí
Systém množin $\{U_i\}_{i\in J}$, kde J je množina indexů, se nazývá pokrytí M, právě když pro každé $x \in M$ existuje $i \in J$ tak, že $x \in U_i$. Jsou-li U_i otevřené, mluvíme o otevřeném pokrytí.

Definice. Topologická definice kompaktnosti
Množina $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní, pokud z každého otevřeného pokrytí K lze vybrat pokrytí konečné.

Věta 9.9
Buď $A \subset M$, kde je (M, ϱ) je metrický prostor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) Z každého otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečné.

(2) Každá posloupnost bodů z A obsahuje podposlounost konvergentní v A.

(3) (A, ϱ) je úplný a A je totálně omezená(tj. $\forall \varepsilon > 0$ existuje konečné pokrytí A ε-koulemi).

Důkaz.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Předpokládejme existenci $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, která neobsahuje konvergentní podposloupnost. Pak $\forall y \in A, \exists r(y)$ tak, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap B_r(y)$ je konečná. Potom $\cup_{y \in A} B_r(y)$ je otevřené pokrytí A a dle (1) existuje konečně množin $B_r(y_i)$ tak, že $A \subset \cup_{i=1}^{m} B_r(y_i)$. Pak ale $\{x_n\}$ je konečná, což je spor.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Dle (2) má každá cauchyovská posloupnost limitu v A, tedy (A, ϱ) je úplný. Kdyby existovalo $\varepsilon > 0$ tak, že A by nebylo možné pokrýt konečným počtem ε-koulí, pak

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists x_k \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i).$$

  Nalezli jsme tedy $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, která nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s předpokladem (2).

- (3) $\Rightarrow$ (1). Buď $\{U\}$ otevřené pokrytí A. Definujme

$$F \equiv \{B \subset M, B \text{ nelze pokrýt konečně mnoha } U_i\}.$$

  Chceme ukázat, že $A \notin F$. Nechť $A \in F$. Dle předpokladu je A totálně omezená. K $\varepsilon > 1$ existují tedy $B_1(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ tak, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_1(x_i)$. Pak však existuje $i_0 \in \{1, 2, \ldots, N\}$, pro který $C_1 = A \cap B_1(x_{i0}) \in F$(jinak spor).
  C_1 je taky totálně omezená. K $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existují $B_{\frac{1}{2}}(\hat{x_i}),\ i = 1, 2, \ldots, N_1$ tak, že $C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} B_{\frac{1}{2}}(\hat{x_i})$ a opět pro jisté $\hat{i_0} \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$ je $C_2 = C_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(\hat{x_{\hat{i_0}}}) \in F$.
  Induktivně dostaneme

$$C_0 \equiv A \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset \cdots,$$

  kde $C_k = C_{k-1} \cap B_{\frac{1}{k}}(x_k),\ x_k \in B_{\frac{1}{k-1}}(x_{k-1})$. Tedy $\{x_k\}$ je cauchyovská, podle (3) existuje $x_0 \in A$ tak, že $x_k \to x_0$ v A. Ale $x_0 \in U_l$ pro jisté l a existuje k dostatečně velké tak, že $C_k \subset U_l$ pro $\forall k \geq k_0$, což je spor neboť $C_k \in A$.

Uvědomme si následující charakterizaci uzavřených množin.

Věta 9.10
$A \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená právě tehdy, když $\forall x_n \in A, x_n \to x \Rightarrow x \in A$.

Důkaz.

$\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}^d$ uzavřená, $x_n \in A$, $x_n \to x$ a $x \notin A$. Pak $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$, což je otevřená množina. Existuje tedy $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus A$ a máme spor, neboť x_n nemohou konvergovat k x.

$\Leftarrow$ Vyberme $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ libovolné. Kdyby $U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak existují $x_n \in A$ tak, že $x_n \to x$ v $\mathbb{R}^d$. Pak ale x musí ležet v A, což je spor s předpokladem.

Věta 9.11 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^d$)
Množina $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní právě když K je omezená a uzavřená.

Důkaz. Dle Věty 9.9 je $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní právě když $(K, |x-y|_\infty)$ je úplný a K je totálně omezená nebo K je uzavřená a omezená. Dle Věty 9.10 je uzavřenost ekvivalentní s úplností $(K, |x-y|_\infty)$. Zbývá ověřit, že v $\mathbb{R}^d$ je totální omezenost ekvivalentní s omezeností.
Je-li K totálně omezená, tj. $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$, pak definujme

$$L := \max_{i,j=1,2,\dots,d} |x_{ij}| + \varepsilon$$

a $K \subset B_L(\vec{0})$, tedy K je omezená. Je-li K omezená, pak existuje $L > 0$ tak, že $K \subset B_L(\vec{0})$, což je krychle o straně $2L$. Uvažme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $k = \left[\frac{L}{\varepsilon}\right] + 1$, a pokryjeme ji konečným počtem krychliček o straně ε.

Shrnutí

(1) $\mathbb{R}^d$ je s libovolnou normou $|\vec{x}|_p$, $p \in \langle 1, \infty)$ úplný prostor(tvrzení jsme ukázali pro $|\vec{x}|_\infty$, která je však s libovolnou normou $|\vec{x}|_p$ ekvivalentní).

(2) $\vec{x}^n \to \vec{x}$ v $\mathbb{R}^d$ právě když $x_i^n \to x_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, d$(rozmyslete).

(3) $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ K je uzavřená a omezená.

(4) Každá omezená posloupnost v $\mathbb{R}^d$ obsahuje konvergentní podposloupnost.

Kompaktní množiny budou hrát v $\mathbb{R}^d$ roli uzavřených intervalů v $\mathbb{R}$(např. spojitá funkce na kompaktu nabývá svého maxima i minima).
Věta 9.11 neplatí v prostorech nekonečné dimenze, tam platí jen implikace

$$A \subset (M, \varrho) \text{ je kompaktní } \Rightarrow \quad A \text{ je omezená a uzavřená.}$$

Ještě silneji, platí následující **Heine-Borelova věta**

$$\overline{B_1(0)} \equiv \{x \in M; \varrho(x, 0) \leq 1\} \text{ je v } (M, \varrho) \text{ kompaktní } \Leftrightarrow \dim M < \infty.$$

P ř í k l a d. Uvažujme prostory $\ell^p, p \in \langle 1, \infty)$ dané vztahy

$$\ell^p = \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty; (\textstyle\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$
$$\ell^\infty = \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty; \max_{i=1,2,\dots} |x_i| < \infty\}.$$

Již víme, že ℓ^p jsou vektorové prostory. Ukažte, že ℓ^p jsou normované prostory s normou

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \|x\|_\infty = \sup_{i=1,2,\dots} |x_i|.$$

Nezápornost a homogenita jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti

$$\|x+y\|_{\ell^p}^p = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \left((\textstyle\sum_{i=1}^m |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^m |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right)^p = (\|x_i\|_{\ell^p} + \|y_i\|_{\ell^p}).$$

Uvažujme $\{x^n\}_{i=1}^\infty \in \ell^p$ definovanou $x_i^n = \delta_{in}$. Pak $\|x^n - x^m\|_{\ell^p}^p = 2$, $n \neq m$ a vidíme, že nelze vybrat z $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní podposloupnost. Také $\dim \ell^p = \infty$.

9.4 Limita, spojitost a derivace funkcí více proměnných

Buď $f : M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^d$.

Příklad.

$$f : M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

znamená

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d)).$$

Je-li $m = 1$, mluvíme o skalární funkci.

Definice.
Když řekneme, že f má v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ limitu $A \in \mathbb{R}^m$, myslíme tím jednu z následujících definic

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0|_{\infty,\mathbb{R}^d} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A|_{\infty,\mathbb{R}^d} < \varepsilon),$$
$$(\forall U_\varepsilon(A))(\exists \mathrm{P}_\delta(x_0))(x \in U_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in U_\varepsilon(A)),$$
$$(\forall U(A))(\exists \mathrm{P}(x_0))(f(\mathrm{P}(x_0)) \subset U(A)).$$

Definice.
Řekneme, že f je v $x_0 \in \mathbb{R}^d$ spojitá pokud $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, neboli

$$(\forall U f(x_0))(\exists U(x_0) : \; f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))).$$

Rozmyslete si, že i v $\mathbb{R}^d$ (a dokonce i v úplném metrickém prostoru) platí věty:

- o jednoznačnosti limity,
- o limitě a spojitosti součtu, skalárního součinu, podílu skalárních funkcí,
- o spojitosti složeného zobrazení,
- o existenci okolí $U(x_0)$, na kterém je funkce omezená (pokud má f v x_0 limitu).
- Heineho, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\},\; x_n \to x_0,\; \lim_{x \to x_0} = A$.

Pro skalární funkce jsme dokázali větu o ekvivalenci existenci limity funkce s existencí a rovností limit zleva a zprava. Následující příklad ukazuje, že i když limity po všech přímkách existují a rovnají se, limita nemusí existovat.

Příklad 1. Buď $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definována předpisem

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

Pak $x_2 = kx_1$, kde $k \in \mathbb{R}$, jsou všechny přímky vycházející z počátku.
Pokud se k počátku blížíme po těchto přímkách, platí

$$f(x_1, kx_1) = \frac{kx_1^3}{x_1^4 + k^2 x_1^2} = \frac{x_1}{k(1 + \frac{x_1^2}{k^2})} \to 0 \quad \text{pro} \quad x_1 \to 0.$$

Přesto $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje. Volíme-li $x_2 = kx_1^2$ (jdeme k 0 po parabole), pak

$$\lim_{x\to 0, x_2=kx_1^2} f(x) = \lim_{x_1\to 0} \frac{kx_1^4}{x_1^4 + k^2x_1^4} = \lim_{x_1\to 0} \frac{k}{1+k^2} \neq 0 \quad \text{pro} \quad \forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Příklad 2. Buď $f(x) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$. Ukažte, že limity po osách existují, ale $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Definice. Parciální derivace, Jacobiho matice, divergence

Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $x^0 \in M$. Pro $f : M \to \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= f(\xi, x_2^0, \ldots, x_d^0), \\ g_2(\xi) &= f(x_1^0, \xi, \ldots, x_d^0), \\ &\vdots \\ g_d(\xi) &= f(x_1^0, \ldots, x_{d-1}^0, \xi), \\ g_i &: (x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta) \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že g_i má derivaci v x_i^0, pak tuto derivaci nazveme parciální derivací funkce f ve směru x_i, značíme $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{\xi\to x_i^0} \frac{g_i(\xi) - g_i(x_i^0)}{\xi - x_i^0} = \lim_{\xi\to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, \xi, \ldots, x_d^0 - f(x^0))}{\xi - x_i^0}.$$

Jiné značení může být $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \partial_{x_i} f(x_0) = \partial_i f(x_0)$. Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0))$ se nazývá gradient f v bodě x_0, značí se $\nabla f(x_0)$.

Je-li $f : M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, x_0 \in M$, pak matice derivací

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), & \ldots & , \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0), & \ldots & , \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}$$

se nazývá Jakobián nebo Jakobiho matice a značí se $Df(x_0)$ nebo $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_d)}(x_0)$.

Je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pak Jakobián je čtercová matice a její stopa se nazývá divergence f v bodě x_0

$$\mathrm{div} f(x_0) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0) = \ \mathrm{Tr}\ Df(x_0).$$

Buď $v = (v_1, \ldots, v_d)$, $|v| = 1$, $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^d$ tak, že pro $t > 0$ je $x_0 + tv \in \mathbb{R}^d$. Derivací f ve směru v v bodě x_0, značenou $\partial_v f(x_0)$, pak nazveme

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

pokud tato limita existuje. Parciální derivace podle proměnné x_i je tedy derivace ve směru $\vec{e_i}$.

Induktivně lze definovat derivace vyšších řádů, např.

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial h(x_0)}{\partial x_i}, \text{ kde } h(z) = \frac{\partial h(z)}{\partial x_j}.$$

Příklad 1. Buď $f(x) = \sin(x_1 x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pak

$$\nabla f(x) = (x_2 \cos(x_1 x_2), x_1 \cos(x_1 x_2)).$$

Příklad 2. Je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineární funkce, tj. $f(x) = \sum_{i=1}^d a_i x_i$, pak $\nabla f(x) = (a_1, \dots, a_n) = a \in \mathbb{R}^d$ je konstantní vektor.

Příklad 3. Podobně je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ dáno předpisem

$$f(x) = \mathbb{A}x + b = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots & , a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & \dots & , a_{md} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

pak

$$(\nabla f)(x) = \mathbb{A}.$$

Věta 9.12
Nechť existují parciální derivace $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ v bodě $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existují parciální derivace funkcí $f + g$, αf, fg v bodě x^0.

Důkaz. Byl by založen na větách pro funkce jedné reálné proměnné.

Poznámka. Pozor! Z existence parciálních derivací v bodě x^0 neplyne spojitost f v x^0 jak ukazuje následující příklad

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak $\frac{\partial f(0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0)}{\partial y} = 0$, ale f není spojitá v 0.

Věta 9.13 (O derivování složené funkce)
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $g : M \to \mathbb{R}^m$ spojitá, mající v $x \in M$ parciální derivace. Buď $g(M) \subset N$ a $f : N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v N. Pak funkce

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$$

je v M definována a existuje parciální derivace $f \circ g$. Navíc

$$\underbrace{\nabla (f \circ g)(x)}_{\text{d-vektor}} = \underbrace{\nabla f(g(x))}_{\text{m-vektor}} \quad \cdot \quad \underbrace{Dg(x)}_{\text{m}\times\text{d matice}}$$

neboli

$$\left(\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_d}(x) \right) = \left(\frac{\partial f(g(x))}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f(g(x))}{\partial y_m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1}, & \dots & , \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1}, & \dots & , \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Je-li $f : N \to \mathbb{R}^3$, pak

$$[D(f \circ g)](x) = [Df](g(x)) [Dg](x).$$

Důkaz. Buď $e^i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{di})$ jednotkový vektor. Chceme ukázat, že pro $i = 1, 2, \dots, d$ je

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(g(x+he^i)) - f(g(x))}{h} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(g(x))}{y_k} \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i}.$$

Avšak

$$\begin{aligned}
&\tfrac{f(g(x+he^i))-f(g(x))}{h} = \\
&= \tfrac{f(g_1(x+he^i),g_2(x+he^i),\dots,g_m(x+he^i))-f(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x))}{h} = \\
&= \tfrac{f(g_1(x+he^i),g_2(x+he^i),\dots,g_m(x+he^i))-f(g_1(x),g_2(x+he^i),\dots,g_m(x+he^i))}{h} + \\
&+ \tfrac{f(g_1(x),g_2(x+he^i),\dots,g_m(x+he^i))-f(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x+he^i))}{h} + \\
&\vdots \\
&+ \tfrac{f(g_1(x),\dots,g_{m-1}(x),g_m(x+he^i))-f(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x))}{h}.
\end{aligned}$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě dále upravíme poslední výrazy na tvar

$$\begin{gathered}
\tfrac{\partial f}{\partial y_1}(g_1(x+\theta_1 he^i), g_2(x+he^i), \dots, g_m(x+he^i))\tfrac{g_1(x+he^i)-g_1(x)}{h} + \\
+\tfrac{\partial f}{\partial y_2}(g_1(x), g_2(x+\theta_2 he^i), \dots, g_m(x+he^i))\tfrac{g_2(x+he^i)-g_2(x)}{h} + \\
\vdots \\
+\tfrac{\partial f}{\partial y_m}(g_1(x+he^i), \dots, g_{m-1}(x), g_m(x+\theta_m he^i))\tfrac{g_m(x+he^i)-g_m(x)}{h} \\
\downarrow h \to 0_+ \\
\tfrac{\partial f}{\partial y_1}(g(x))\tfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_i} + \dots + \tfrac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\tfrac{\partial g_m(x)}{\partial x_i},
\end{gathered}$$

neboť díky spojitosti g

$$\begin{gathered}
\lim_{h\to 0+} g_l(x+\theta he^i) = g_l(x), \\
\lim_{h\to 0+} g_l(x+he^i) = g_l(x), \\
\lim_{h\to 0+} \tfrac{g_l(x+he^i)-g_l(x)}{h} = \tfrac{\partial g_l}{\partial x_i}(x).
\end{gathered}$$

Využívali jsme rovněž větu o spojitosti složeného zobrazení.

Věta 9.14
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f : M \to \mathbb{R}$ nechť má spojité první parciální derivace v M. Pak pro $\forall x \in M$ platí

$$\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v \quad (= (\nabla f(x), v)).$$

Důkaz. Víme, že $(v = (v_1, \dots, v_d), |v|_E = 1)$

$$\partial_v f(x) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+vt)\right]_{t=0} \overset{\text{V } 9.13}{=} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i = (\nabla f(x), v).$$

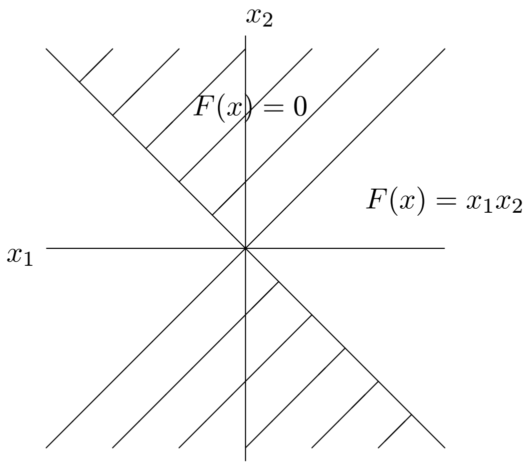
Pozorování 3. Ze Schwarzovy nerovnosti víme, že

$$-\left|\nabla f(x)\right|_E \leq (\nabla f(x), v) \leq \left|\nabla f(x)\right|_E |v|_v = \left|\nabla f(x)\right|_E .$$

Navíc rovnost platí je-li $v^{\pm} = \pm\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|_E}$. Tedy derivace ve směru nabývá největšího růstu ve směru v^+ a největšího poklesu ve směru v^-. Nyní se vrátíme k otázce záměny pořadí parciálních derivací. Následující příklad ukazuje, že tomu tak obecně není.

P ř í k l a d 1. Buď

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & |x_1| \leq |x_2| , \\ x_1 x_2 & |x_1| > |x_2| . \end{cases}$$



Obrázek 4: K příkladu 1.

Spočítejme $\frac{\partial F}{\partial x_1}(0, x_2)$ a $\frac{\partial F}{\partial x_2}(0, x_1)$ pro $x_2 \neq 0 \neq x_1$.
Máme $\frac{\partial F}{\partial x_1}(0, x_2) = 0$, neboť F je pro každé $x_2 \neq 0$ nulová na okolí $(-\delta, \delta)$, kde δ závisí na x_2(viz. obr.4). Naopak $\frac{\partial F}{\partial x_2}(0, x_1) = x_1$. Odtud vidíme, že

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).$$

Následující věta dává postačující podmínky, kdy lze zaměňovat pořadí derivování bez problémů.

Věta 9.15
Nechť je $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a nechť má $f : M \to \mathbb{R}$ spojité druhé parciální derivace. Pak pro každé $x \in M$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \ \ \forall i, j = 1, 2, \ldots, d.$$

Důkaz. Označme $\omega(x) = \Delta_j^h f(x) = \frac{f(x+he^j)-f(x)}{h}$. Platí

$$\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \Delta_i^h \ \omega(x) = \frac{\omega(x+he^i)-\omega(x)}{h} =$$
$$= \frac{f(x+he^i+he^j)-f(x+he^i)-f(x+he^j)+f(x)}{h^2}.$$

Tento výraz však získáme i z $\Delta_j^h \Delta_i^h f(x)$,

$$\Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \Delta_j^h \Delta_i^h f(x) \quad \forall x \in M.$$

Stačí tak ukázat

$$\lim_{h \to 0} \Delta_i^h \Delta_j^h f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in M,\ i, j = 1, \dots, d.$$

Protože

$$\Delta_j^h f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + te^j)\ \mathrm{d}t$$

a

$$\Delta_j^h f(x + he^i) = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + he^i + te^j)\ \mathrm{d}t,$$

vidíme, že

$$\begin{aligned} \Delta_i^h \Delta_j^h f(x) &= \tfrac{1}{h^2} \textstyle\int_0^h [\tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x + te^j + he^i) - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(x + te^j)]\ \mathrm{d}t = \\ &\overset{\text{LVOSH}}{=} \tfrac{1}{h} \textstyle\int_0^h [\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + te^j + \theta he^i)]\ \mathrm{d}t = \\ &= \tfrac{1}{h} \textstyle\int_0^h [\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + te^j + \theta he^i) - \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)]\ \mathrm{d}t + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Protože $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v M, tak $(0 \le t \le |h|)$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + te^j + \theta he^i) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 0.$$

Potom $(\forall \varepsilon > 0)(\exists h_0 > 0)$ takové, že pro $|h| \le h_0$

$$\left| \Delta_i^h \Delta_j^h f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \le \varepsilon,$$

což jsme chteli dokázat.

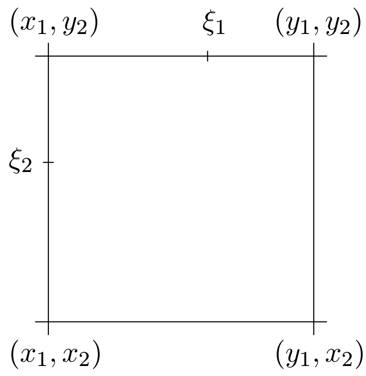
9.5 Totální diferenciál a Taylorův rozvoj

Často potřebujeme vyjádřit rozdíl $f(y) - f(x)$ pomocí derivace. K tomu lze s úspěchem využít věty o střední hodnotě. Pro funkce více proměnných máme více variant.

- Až na jednu proměnnou ostatní ponecháme a pohybujeme se jen ve směru jedné osy(tuto metodu jsme využili v důkazu Věty 9.13)

  $$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i)(y_i - x_i,),$$

  kde ξ_i leži mezi $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$ a $(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$.



Nevýhodou této konstrukce je d různých bodů $\xi_1, \ldots, \xi_d$.

- Nalezneme bod ξ na přímce spojující body (x_1, x_2) a (y_1, y_2). Přesněji v následující větě.

Věta 9.16
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f \in C^1(M) \equiv \{h : M \to \mathbb{R};\ \exists \frac{\partial h}{\partial x_i},\ h \in C(M)\}$. Buď $x, y \in M$ takové, že $\{z;\ z = tx + (1-t)y,\ t \in \langle 0, 1\rangle\} \subset M$. Pak existuje $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x + \theta(y - x)) \cdot (y - x).$$

Důkaz. Definujme $g(t) = f(x + t(y - x))$. Pak g je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ a g' existuje na $(0, 1)$. Navíc $g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$. Tak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme pro $\theta \in (0, 1)$

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1 - 0) = g'(\theta).$$

Avšak

$$g'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta(y - x))(y_i - x_i),$$

což jsme měli dokázat.

Definice. Souvislá množina
Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je souvislá, jestliže pro každé $x, y \in M$ existují body $x^i \in M$, $i = 1, 2, \ldots, N$ tak, že $x^1 = x,\ x^N = y$ a úsečky

$$\langle x^i, x^{i+1}\rangle \equiv \{tx^i + (1-t)x^{i+1}, t \in \langle 0, 1\rangle\} \subset M,$$

pro $i = 1, 2, \ldots, N - 1$.

Důsledek. (Věty 9.16) Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená a souvislá. Nechť

$$\nabla f(x) = 0 \text{ pro } \forall x \in M.$$

Pak

$$f \equiv C.$$

Důkaz. Plyne z definice souvislosti (a otevřenosti) M a ze skutečnosti, že $f(y) = f(x^0)$, kde $x^0 \in M$ je pevný, a $y \in M$ libovolné.

Věta 9.17
Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, body $x, x^0 \in M$ takový, že úsečka $\langle x, x^0\rangle$ leží v M. Buď $f \in C^1(M)$, respektive $f \in C^1(M)^m$. Pak

$$W := \frac{f(x) - f(x^0) - \nabla f(x_0)\cdot(x - x^0)}{|x - x^0|_E} \longrightarrow 0 \ \text{ pro } x \to x^0,\ x \neq x^0,$$

respektive

$$\left|\vec{f}(x) - \vec{f}(x^0) - D\vec{f}(x_0)(x - x^0)\right|_E = \sigma(\left|x - x^0\right|_E) \ \text{ pro } x \to x^0,$$

kde $D\vec{f}(x_0)$ je Jacobiho matice $(m \times d)$ a $D\vec{f}(x_0)(x - x^0)$ je m vektor.

Důkaz. Jen pro $m = 1$. Užijeme-li Větu 9.16 vidíme, že pro jisté $\theta \in (0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} W &= \frac{(\nabla f(x^0 + \theta(x - x^0)) - \nabla f(x^0))\cdot(x - x^0)}{|x - x^0|_E} \\ &= (\nabla f(x^0 + \theta(x - x^0)) - \nabla f(x^0))\cdot\frac{x - x^0}{|x - x^0|_E}. \end{aligned}$$

Odtud

$$|W| \le \left|\nabla f(x^0 + \theta(x - x^0)) - \nabla f(x^0)\right|_E$$

Díky spojitosti ∇f vidíme, že $W \to 0$ pro $x - x^0 \to 0$, což jsme chtěli dokázat.

Definice. Totální diferenciál
Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ je totální diferenciál funkce $f : M \to \mathbb{R}^m$ v bodě x^0 jestliže platí

$$\left|f(x) - f(x^0) - L(x - x^0)\right|_{E,\mathbb{R}^m} = \sigma(\left|x - x^0\right|_{E,\mathbb{R}^d}).$$

Věta 9.17 ukazuje, že totální diferenciál existuje, pokud jsou splněny dvě podmínky

(α) existují první parciální derivace na $U(x^0)$

(β) a jsou spojité v x^0.

Pokud $(\alpha), (\beta)$ platí, pak

$$L \equiv \nabla f(x^0)\cdot(x - x^0) \quad \text{resp.} \quad Df(x^0)\cdot(x - x^0).$$

Pozor, k existenci diferenciálu nestačí spojitost f v x^0 a existence parciálních derivací v x^0 jak ukazuje následující příklad.

P ř í k l a d. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definováno vztahem

$$f(x) = \begin{cases} x_1 & x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_2 \ge x_1, \\ x_2 & x_1 > 0,\ x_1 > 0,\ x_1 \ge x_2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zřejmě je $f \in C(\mathbb{R}^2), f(0,0) = 0$ a také

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0.$$

Tedy $L = (0,0)$ je kandidát na totální diferenciál. Avšak

$$Z = \frac{f(x_1,x_2) - f(0,0) - L(x-(0,0))}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \overset{x_2=x_1}{=} \frac{x_1}{\sqrt{2x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

a tak f nemá v $(0,0)$ diferenciál.
Uveďme si ještě alespoň jeden resp. dva alternativní zápisy totálního diferenciálu

$$\lim_{h\in\mathbb{R}^d, |h|\to 0} \frac{f(x^0+h) - f(x^0) - L(x^0)h}{|h|_E} = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Obvykle se zavádí značení

$$L(x^0)h = \mathrm{d}f(x^0)(h) = \mathrm{d}f(x^0)h.$$

Věta 9.18
Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ má v x^0 totální diferenciál.Pak
(1) Existují všechny 1. parciální derivace f, tj. existují $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ a platí

$$L_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \text{ neboli } df(x_0)(h) = \nabla f(x_0) \cdot h.$$

(2) V bodě x^0 existují derivace ve všech směrech a platí

$$\partial_v f(x^0) = \mathrm{d}f(x^0)v = \nabla f(x^0) \cdot v.$$

(3) f je v x^0 spojitá.

Důkaz.

(2) Máme

$$\begin{aligned} \partial_v f(x^0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv) - f(x^0) - \mathrm{d}f(x^0)(tv)}{|t|\,|v|_E} \frac{|t|}{t} + \frac{\mathrm{d}f(x^0)(tv)}{t} \\ &= 0 + \mathrm{d}f(x^0)v, \end{aligned}$$

díky linearitě diferenciálu a $|v|_E = 1$.

(1) Existence $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$ plyne z dokázaného volbou $v = e^i,\ j = 1, \ldots, d$, což také implikuje

$$\mathrm{d}f(x^0)e^j = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}.$$

(3) Platí

$$\lim_{h\to 0}(f(x^0+h)-f(x^0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)-\ \mathrm{d}f(x^0)h}{|h|_E}|h|_E + \mathrm{d}f(x^0)h = 0.$$

Poznámka 1. Nyní již víme, že pokud totální diferenciál f v bodě x^0 existuje, pak musí být nutně tvaru

$$L_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Ukázali jsme si, že na spojitost v bodě nestačí existence parciálních derivací v bodě, ale stačí existence diferenciálu.

Poznámka 2. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nulová až na polokružnici, kde je $f \equiv 1$‘. Pak $\partial_v f(0,0) = 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2$, $|v|_E = 1$, ale $\mathrm{d}f(0,0)$ neexistuje, neboť $\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ nekonverguje k nule. Jsou-li $(h_1-1)^2+h_2^2 = 1$, pak $(h_1 > 0)$

$$f = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\sqrt{h_1^2+1-h_1^2-1+2h_1}} \to +\infty \quad \text{pro} \quad h_1 \to 0^+.$$

Poznámka 3. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována $f(x) = |x|$ nemá v 0 diferenciál, i když je f spojitá. Kandidátem by mohlo být jakékoli $a \in \langle -1, 1\rangle$. Avšak

$$\frac{|h|-0-ah}{|h|} = \begin{cases} h > 0 : 1-a \neq 0 & \text{kromě } a = 1, \\ h < 0 : 1+a \neq 0 & \text{kromě } a = -1. \end{cases}$$

V $\mathbb{R}$ pojmy existence $f'(x_0)$ a $\mathrm{d}f(x_0)$ splývají.

Poznámka 4. Geometrická interpretace diferenciálu pro $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f(x^0)(x-x^0) = \nabla f(x^0)\cdot(x-x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0) + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0),$$

což je rovina v $\mathbb{R}^3$. Pro $z^0 = f(x_1^0, x_2^0)$ uvažujme množinu všech těch $x = (x_1, x_2, x_3)$ takových, že

$$-(x_3-x_3^0) + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0) + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0) = 0,$$

říkáme jí tečná nadrovina. Je to množina všech $x = (x_1, x_2, x_3)$ tak, že

$$(x-x^0)\cdot(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), -1) = 0,$$

tj. množina všech těch bodů kolmých na $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), -1)$ tzn. tento vektor je ve směru normály k rovine dané diferenciálem.

Věta 9.20 (Taylorův vzorec)
Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená, $x \in M$, $h \in \mathbb{R}^d$ tak, že $\{x+th;\ t \in \langle 0,1\rangle\} \subset M$. Buď $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in C^{N+1}(M)$. Pak existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že

$$f(x+h) = f(x) \quad + \quad \nabla f(x)\cdot h + \frac{1}{2}h\cdot\nabla^2 f(x)h +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k + \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{N!}\sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{d} \frac{\partial^N f(x)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_N}} h_{i_1}\dots h_{i_N} + \\
&+ \frac{1}{(N+1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{N+1}=1}^{d} \frac{\partial^{N+1} f(x+\theta h)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{N+1}}} h_{i_1}\dots h_{i_{N+1}},
\end{aligned}
$$

neboli(následují definice diferenciálů vyšších řádů)

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + df(x)h + \frac{1}{2}d^{(2)}f(x)(h,h) + \frac{1}{3!}d^{(3)}f(x)(h,h,h) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{N!}d^N f(x)\underbrace{(h,\ldots,h)}_{N-\text{krát}} + \frac{1}{(N+1)!}d^{N+1}f(x+\theta h)\underbrace{(h,\ldots,h)}_{(N+1)-\text{krát}},
\end{aligned}
$$

kde

$$
d^{(K)}f(x)\underbrace{(h,\ldots,h)}_{K-\text{krát}}
$$

je K-lineární zobrazení.

Důkaz. Položme $F(t) = f(x+th)$, pak podle věty o střední hodnotě platí

$$
F(1) - F(0) = f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{F^{(i)}(0)}{N!} + \frac{F^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)!},
$$

ale

$$
F^{(k)}(t)|_{t=0} = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}} h_{i_1}\dots h_{i_k},
$$

což dává tvrzení.

9.6 Spojité zobrazení na kompaktu, extrémy funkcí

V následujících třech tvrzeních budeme zkoumat vlastnosti spojitých funkcí na kompaktní množině $K \subset \mathbb{R}^d$. Tvrzení však platí i pro K, která jsou podmnožinou úplného metrického prostoru.

Věta 9.21
Buď $f \in C(K),\ K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní. Pak $L \equiv f(K)$ je kompaktní množina.
Speciálně $f(K)$ je omezená množina.
(Analog věty ze ZS - obraz intervalu při spojitém zobrazení je interval).

Důkaz. Využijeme následující charakterizaci kompaktnosti

$$
\forall \{y^n\}_{n=1}^{\infty} \exists \{y_k^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ a } \exists y \in f(K) \text{ tak, že } y_k^n \to y \text{ pro } k \to \infty.
$$

Buď tedy $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(K)$ libovolné. Pak existuje $x^n \in K$ tak, že $f(x^n) = y^n$. Ale $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompakt a podle charakterizace kompaktnosti existuje $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $x \in K$ tak, že $x_{n_k} \to x$ pro $k \to \infty$.
Ze spojitosti(a její Heineho ekvivalentní formulace) pak plyne

$$y_k^n := f(x_k^n) \to f(x) \in f(K),$$

což je naše tvrzení.
Před dalším tvrzením si zkuste napsat definici stejnosměrné spojitosti $f : M \to N$, a to v případě, že

(i) $M \subset \mathbb{R}^d$ a $M \subseteq \mathbb{R}^m$,

(ii) M je podmnožina úplného metrického prostoru $(X, \rho_X$ a N je podmnožina úplného metrického prostoru (Y, ρ_Y); ρ_X a ρ_Y jsou metriky v X resp. v Y.

Věta 9.22
Buď $f \in C(K),\ K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Pak f je stejnoměrně spojitá v K.

Důkaz. Zkuste nejdříve sami. Schéma je podobné jako pro funkce jedné proměnné. Podrobně pro nesamostatné. Vyjděme z definice stejnoměrné spojitosti

$$f \in K : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |x - y|_{E,\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|_{E,\mathbb{R}^d} < \varepsilon,$$

neboli

$$\rho_X(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

a tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme tedy, že

$$(*) \qquad (|x^n - y^n|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n}) \wedge (|f(x^n) - f(y^n)|_{\mathbb{R}^d} \geq \varepsilon_0)$$

Protože K je kompakt, existují $\{x_k^n\} \subset \{x^n\}$ a $\{y_k^n\} \subset \{y^n\}$ a $x, y \in K$ tak, že $x_k^n \to x$ a $y_k^n \to y$. Podle první části $(*)$ však $x = y$, a tak ze spojitosti f plyne

$$f(x_k^n) \to f(x), f(y_k^n) \to f(x),$$

neboli $f(x_k^n) - f(y_k^n) \to 0$, což je spor s druhou částí $(*)$.

Následující věta je první větou zaručující existenci minimizéru (maximizéru) tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (maxima). Důkaz věty je blízký důkazu základní věty moderní teorie variačního počtu.

Věta 9.23
Buď $f \in C(K),\ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Pak f nabývá v K minima a maxima.

Důkaz. Buď $m = \inf_{x \in K} f(x)$. Z věty 9.21 víme, že $m > -\infty$. Pak existuje $x_n \in K$ tak, že $f(x_n) \searrow m$. Protože K je kompakt, existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $x \in K$ tak, že $x_{n_k} \to x$ pro $k \to \infty$.
Ze spojitosti (Heine)

$$f(x_{n_k}) \to f(x).$$

tedy nutně

$$m = f(x),\ x \in K.$$

Tvrzení o minimu je dokáno. Sami si dokažte tvrzení o maximu.
Nadále uvažujeme $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Pojem globální (lokální) minimum (maximum, extrém) je definován stejně jako pro funkci jedné reálné proměnné. Uvedeme si nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).
Připomeň

- $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt $\Leftrightarrow$ K je uzavřená a omezená.
- K je uzavřená $\Rightarrow K = K^0 \cup \partial K$, kde K^0 je vnitřek.

Věta 9.24 (Nutná podmínka pro existenci extrému)
Nechť

- $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená
- $f : M \to \mathbb{R}^d$ má v $x_0 \in M$ lokální minimum (maximum)
- f má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace.

Pak

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Důkaz. Pro $i = 1, 2, \ldots, d$ uvažuj funkce $g^i(t) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definované

$$g^i(t) = f(x_0 + te^i).$$

Pak g^i mají v x_0 extrém a podle věty z 1.semestru platí $(g^i)'(0) = 0$. Avšak

$$(g^i)(t)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + te^i)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

což dává tvrzení.

Věta 9.25 (Postačující podmínka k existenci extrému)
Nechť

- $f \in C^2(U_\delta(x_0))$.
- $\nabla f(x_0) = 0$.
- $\forall h \in \mathbb{R}^d,\quad \mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}.$

Pak f má v bodě x_0 lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}.$

Důkaz. Taylorův rozvoj (s využitím druhé podmínky) a $h = x - x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x_0 + \theta h))(h,h),\ \theta \in (0,1)$$

přepíšeme

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) + \frac{1}{2}\left[\,\mathrm{d}^2 f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}^2 f(x_0)\right](h,h) = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+\theta h) - \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right)(h_i,h_j). \end{aligned}$$

Na množine $\{h \in \mathbb{R}^d;\ |h| = 1\}$ nabývá $\mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h)$ minima

$$m = \min_{|h|=1}\ \mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) > 0,$$

a tedy $\forall h \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) \geq m|\vec{h}|^2.$$

Ze spojitosti druhých derivací však máme

$$\sup_{i,j=1,\ldots,d}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+\theta h) - \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leq \frac{m}{2}, \quad \forall x:\ |x - x_0| = |h| < \delta$$

A tak z předchozího máme

$$f(x) \geq f(x_0) + m\,|x-x_0|^2 - \frac{m}{2}\,|x-x_0|^2 > f(x_0), \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Poznámka. Buď $d = 2$. Pak třetí podmínka ve Větě 9.25 pro minimum je ekvivalentní s

$$(*) \qquad (h_1,h_2)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Označ

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Pak $(*)$ je ekvivalentní s

$$Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2 > 0, \quad \forall (h_1,h_2) \neq (0,0).$$

Pro $h_1 \neq 0$ je $A + 2B(\frac{h_2}{h_1}) + C(\frac{h_2}{h_1})^2 > 0$ neboli $A > 0$ a $B^2 - 4AC < 0$. Pro $h_2 \neq 0$ $C > 0$ a $B^2 - 4AC < 0$(pro maximum podobně $A < 0(C < 0)$ a $B^2 - 4AC < 0$.
Řekneme, že x_0 je sedlový bod funkce $f \in C^2(U_\delta(x_0))$ pokud

- $\nabla f(x_0) = 0$.
- $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $\mathrm{d}^2 f(x_0)(h_1,h_1) > 0$ a $\mathrm{d}^2 f(x_0)(h_2,h_2) > 0$.

V $d = 2$ se tak stane, pokud $B^2 - 4AC > 0$.
Pokud $\mathrm{d}^2 f(x_0)(h,h) = 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^d$ nelze nic říci, jak ukazují příklady

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4, \text{ minimum } \text{ v } (0,0), \\ f(x,y) &= -x^4 - y^4, \text{ maximum } \text{ v } (0,0), \\ f(x,y) &= x^4 - y^4, \text{ sedlový bod } \text{ v } (0,0). \end{aligned}$$

P ř í k l a d 1. Nalezněte extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} + xy, \; D_f = \{(x,y), y \neq 0\}.$$

Řešení. Nutná podmínka extrému dává

$$\nabla f(x,y) = (\frac{1}{y^2} + y, x - \frac{2x}{y^3}) = 0 \Leftrightarrow y = -1 \wedge x = 0, \; f(0,-1) = 0.$$

Druhý diferenciál

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{y^3} + 1 \\ -\frac{2}{y^3} + 1 & \frac{6x}{y^4} \end{pmatrix}, \\ d^2 f(0,-1)(h,h) &= (h_1,h_2) \cdot (-h_2, -h_1) = -2h_1h_2 = \begin{cases} -2, & (h_1,h_2) = (1,1) \\ 2, & (h_1,h_2) = (-1,1) \end{cases}, \end{aligned}$$

nebo ještě jinak $B^2 - 4AC = 1 > 0$, tedy v $(0,1)$ jsme zjistili sedlový bod.

P ř í k l a d 2. Funkce $f(x,y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ má 5 podezřelých bodů. Spočítejte!

P ř í k l a d 3. Najděte globální extrémy funkce na množine M

$$f(x,y) = x - y, \; M = \{(x,y); \; y \leq 1, \; x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

Řešení. Je $f \in C(M), \; M$ kompakt $\overset{V9.21}{\Rightarrow}$ f nabývá maxima i minima na M.

- Na vnitřku M je $\forall x, y \in \mathbb{R}^2: \; \nabla f(x,y) = (1,-1) \neq (0,0)$, uvnitř M se extrém nenachází.

- Hranice M
$$\partial M = \Gamma_1 \cup \{(-2,1)\} \cup \{(2,1)\} \cup \Gamma_2,$$
kde
$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x,y); \; x \in (-2,2), y = 1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x,y); \; x^2 + y^2 = 5, \; y < 1, \; x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi\}. \end{aligned}$$
Na Γ_1 zaveďme $y = 1, \; x = t, \; t \in (-2,2), \; f(x,y) = g(t) = t - 1$. Kdyby byl někde extrém, pak $g'(t) = 0$ ale je $g'(t) = 1$, extrém by mohl být už jen v krajních bodech intervalu, $g(2) = 1, \; g(-2) = -3$.
Na Γ_2 buď $f(x,y) = h(t) = \sqrt{5}(\cos t - \sin t), \; t \in (-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}), \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$.
Hledáme body, kde $h'(t) = 0$, zkuste dopočítat sami.

Jiná metoda - Lagrangeova(vázáných extrémů), pro úlohy najít maximum funkce na množině dané vazbou

$$A = \{x \; \in \mathbb{R}^d; \; g(x) = 0\}.$$

V našem příkladě by bylo $f(x,y) = x - y, \; g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$.

Věta 9.26 (Lagrangeova o multiplikátorech, resp. o vázaných extrémech)
Nechť

- $f, g \in C^1(M),\ M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$,
- $A = \{x \in M;\ g(x) = 0\}$ (vazební podmínka),
- $z_0 \in M:\ f(z_0) = \min_{z \in A} f(z)$ (nebo $f(z_0) = \max_{z \in A} f(z)$)
- $\nabla g(z_0) \neq 0$.

Pak $\exists \lambda \in \mathbb{R}^d$ tak, že $\nabla f(z_0) = \lambda \nabla g(z_0)$.

Důkaz. Dnes jen pro $d = 2$.
V okolí $z_0 = (x_0, y_0)$ si parametrizujme body na vazbě $x(t), y(t),\ t \in (-\delta, \delta),\ \delta > 0$ tak, že $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$(existence parametrizace plyne ze čtvrtého předpokladu $\nabla g(x, y) \neq 0$).
Derivace vazební funkce g dává

$$\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

speciálně pro $t = 0$ máme

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0.$$

Avšak (x_0, y_0) je bod min(max) funkce f. Tedy $f(x(t), y(t))$ má v $t = 0$ extrém, což implikuje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t))|_{t=0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x'(0), y'(0))$$

Porovnáním posledních dvou vztahů vidíme, že vektory $\nabla f(x_0, y_0)$ a $\nabla g(x_0, y_0)$ jsou rovnoběžné, co byl náš cíl.
Dokončení příkladu před větou - rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad g(x, y) = 0$$

implikují $1 = 2\lambda x,\ -1 = 2\lambda y,\ x^2 + y^2 = 5$, tj. $x_{12} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ a $y_{12} = \mp\sqrt{\frac{5}{2}}$.
Na kruhovém oblouku leží jen bod $(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$. Porovnáním funkčích hodnot v podezřelých bodech zjistíme odpověď na náš úkol: $f(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}) = \sqrt{10} > 3,\ f(2, 1) = 1$, $f(-2, 1) = -3$. Tedy f nabývá globálního minima v bodě $(-2, 1)$ a globálního maxima v bodě $(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$.

9.7 O čtyřech hlubších větách

(1) Banachova věta o pevném bodě
(2) Věta o implicitních funkcích
(3) Věta o inverzním zobrazení
(4) Lagrangeova věta o vázaných extrémech

9.7.1 Banachova věta o pevném bodě

Připomeňme si, že X je Banachův prostor, je-li lineární(vektorový) s normou $||\cdot||_X$ vzhledem k níž je úplný (každé cauchyovská posloupnost ma limitu v tomto prostoru).

Definice. Pevný bod
Buď X množina. Řekneme, že $T : X \to X$ má pevný bod v X pokud existuje $x_0 \in X$ tak, že $Tx_0 = x_0$.

Věta 9.27 Banachova věta o pevném bodě
Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a nechť $T : X \to X$ je kontraktivní zobrazení (kontrakce), tzn. existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že

$$\|Tx - Ty\|_X \leq \theta \|x - y\|_X , \quad \forall x, y \in X.$$

Pak T má pevný bod.

Poznámka. Věta platí i v úplném metrickém prostoru (X, ρ). Tvrzení přeformulujte! Až si přečtete důkaz Věty 9.27 v úplném normovaném (tedy Banachově) prostoru, zkuste si dokázat i variantu v úplném metrickém prostoru. Kde se využije předpoklad úplnosti?

Důkaz. Spojitost plyne okamžitě z (K).
Jednoznačnost - nechť $x_1 \neq x_2$ jsou dva pevné body. Pak z (K) plyne

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|Tx_1 - Tx_2\|_X \leq \theta \|x_1 - x_2\|_X \Rightarrow (1 - \theta) \|x_1 - x_2\|_X \leq 0,$$

tedy $x_1 = x_2$.
Existence - volme $x_1 \in X$ libovolně a definujme

$$x_n = Tx_{n-1}, \ n \geq 2.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je cauchyovská (splňuje B.-C. podmínku). Protože X je úplný, existuje $x_0 \in X$ tak, že

$$x_n \to x_0 \quad \text{v } X.$$

Protože T je spojité zobrazení, tak z Heineho definice spojitosti plyne $Tx_n \to Tx_0$. Ale $Tx_n = x_{n+1} \to x_0$ v X. Díki jednoznačnosti limity tak z předchozích dvou vztahů plyne

$$Tx_0 = x_0,$$

což jsme měli ukázat.
Zbývá ověřit, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Předně

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|Tx_n - Tx_{n-1}\|_X \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X \leq \theta^n \|x_2 - x_1\|_X ,$$

a odtud $\forall n, m \in \mathbb{N}, \ m > n$

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|_X &= \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + \ldots + x_{m+1} - x_m\|_X \\
&\leq \|x_n - x_{n-1}\|_X + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\|_X \\
&\leq \theta^{n-1} \|x_2 - x_1\|_X + \ldots + \theta^{m-1} \|x_2 - x_1\|_X \\
&= \underbrace{(\theta^{n-1} + \ldots + \theta^{m-1})}_{\text{část konv. geom. řady}} \|x_2 - x_1\|_X .
\end{aligned}$$

Z Bolzano-Cauchyovo podmínky pro konvergenci řad tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n)(\theta^{n-1} + \ldots + \theta^{m-1} < \varepsilon).$$

Tak $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon \|x_2 - x_1\|_X$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.
Banachovu větu použijeme k důkazu věty o existenci a jednoznačnosti řešení systému ODR(V 8.2 - Picard & Lindeloef)

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

za předpokladu Lipschitze(silnějšího než je třeba k existenci)

$$\exists L > 0: \ \left|f(t, y^1) - f(t, y^2)\right| \le L\left|y^1 - y^2\right|, \quad \forall t \in U_{\triangle}(t_0), \ \forall y^1, y^2 \in U_{\square}(y_0)$$

Důkaz. (Věty 8.2) Připomeňme si, že $y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^d$ je řešením systému ODR, když $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$.
Definujme

$$X_\delta \equiv (C(\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta\rangle)^s; \ \|y\|_{x_0} = \sup_{t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta\rangle} |y(t)|),$$

kde $\delta > 0$ libovolné. Víme, že X_δ je Banachův(ověřte !).
Definujme $U : X_\delta \to X_\delta$ předpisem

$$U(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds.$$

Ukážeme, že U je kontrakce. Platí

$$\begin{aligned} \left|U(y^1(t)) - U(y^2(t))\right| &= \left|\int_{t_0}^t f(s, y^1(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y^2(s))ds\right| \\ &\le \int_{t_0}^t \left|f(s, y^1(s)) - f(s, y^2(s))\right| ds \\ &\overset{Lipschitz}{\le} L\int_{t_0}^t \left|y^1(s) - y^2(s)\right| ds \\ &\le L \max_{t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta\rangle} \left|y^1(s) - y^2(s)\right| \int_{t_0}^t ds \\ &\le L\delta \left\|y^1 - y^2\right\|_{X_\delta} \end{aligned}$$

tedy $\left\|U(y^1(t)) - U(y^2(t))\right\|_{X_\delta} \le L\delta \left\|y^1 - y^2\right\|_{X_\delta}$. Volbou $\delta = \frac{1}{L}$ dostáváme kontrakci. Banachova věta už teď implikuje dokazované tvrzení.
Věta o existenci platí i za slabších předpokladů na f

1. zobrazení $y \mapsto f(t, y)$ je spojité pro skoro všechna t.

2. zobrazení $t \mapsto f(t, y)$ je měřitelné pro všechna y.

což jsou tzv. Caratheodoryho podmínky.
Pojmy skoro všude a měřitelnost si trochu ozřejmíme v kapitole o Lebesgueově integrálu.
Nakonec si uvedeme ještě jednu variantu Banachovy věty o pevném bodě, kterou využijeme v následující sekci implicitních funkcí.

Věta 9.28
Buď $T : B_R(0) \to \mathbb{R}^m$ spojité, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^m$. Nechť pro každé $q \in (0,1)$ existuje $\delta > 0$ tak, že $B_\delta(0) \subset B_R(0)$ a platí

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha) & |T(y) - T(z)| \le q\,|y - x|\,,\ \forall y, z \in B_R(0), \\
(\beta) & |T(0)| \le \delta(1-q).
\end{array}
$$

Pak existuje právě jedno $y_0 \in \overline{B_{\delta(0)}}$(uzávěr) tak, že $Ty_0 = y_0$.

Důkaz.

- Volme $q \in (0,1)$ libovolně. Nechť (α) a (β) platí. Definujme

  $$x^0 = 0,\ x^n = T^n(0) = T(x^{n-1}).$$

  Pak

  $$
  \begin{aligned}
  |x^n| = |T^n(0)| &\le \sum_{i=0}^{n-1} \left|T^{i+1}(0) - T^i(0)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} q^i\,|T(0) - 0| \le \\
  \le \frac{1}{1-q}\,|T(0)| &\overset{(\beta)}{\le} \delta.
  \end{aligned}
  $$

  Tedy $\{x^n\}_{n=0}^{\infty} \subset \overline{B_\delta(0)}$.

- Podobně jako v důkazu Banachovy věty ukažte, že $\{x^n\}$ je cauchyovská.

- Limita x^n je hledaný pevný bod. Ověřte!

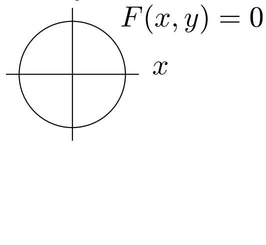
9.7.2 Věta o implicitních funkcích

Věta o implicítních funkcích se zabývá rovnicí tvaru

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Úkolem je rozhodnout, zda tato rovnice určuje y jako funkci x. Pokud to lze, pak $y = f(x)$ pro nějakou funkci f. Říkáme, že f je definována implicitně (1).

Příklad 1. Buď $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Pak (1) určuje body kružnice. Obecně nelze napsat body kružnice 'globálně' jako funkci. Ale lokálně je to možné až na 2 vyjímky.



Horní polokružnice má rovnici $y = \sqrt{1-x^2}$, dolní polokružnice $y = -\sqrt{1-x^2}$. V okolí bodů $(1,0)$ a $(-1,0$ se nám však nedaří vyjádřit y jako funkci x. Čím jsou tyto body význačné? V těchto bodech $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.
Základní úlohu zobecníme pokud (1) chápeme ve tvaru

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \tag{2}$$

kde

$$\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m),\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_m),\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_k),$$

a ptáme se, zda lze (2) lokálně chápat tak, že $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$, kde $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m)$. Přepišme si (2) po složkách

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\
F_2(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\
&\vdots \\
F_m(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) &= 0,
\end{aligned}$$

tj. m-rovnic o $(m+k)$-neznámých, z kterých chceme m-složek vyjádřit pomocí ostatních.
Máme m-rovnic o $(m+k)$-neznámých $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$. Mohu alespoň v okolí nějakého bodu $a = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n})$ takového, že $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}$ vyjádřit m-souřadnic, řekněme $y_1, \ldots, y_m$ jako funkce ostatních proměnných $x_1, \ldots, x_k$?
Posunutím souřadného systému do bodu $\vec{a}$ vidíme, že stačí uvažovat jen případ $\vec{a} = \vec{0}$.
Speciálním, ale velmi důležitým případem je známý problém z lineární algebry - hledáme-li řešení soustavy rovnic

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} y_j = x_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A}\vec{y} = \vec{x}, \tag{3}$$

kde a_{ij}, x_i jsou daná čísla. Pak víme, že řešení (3) existuje a je jediné právě tehdy, když

$$\det \mathbb{A} \neq 0.$$

Všimněme si, že (3) lze psát ve tvaru (2), kde

$$F_i(\vec{x}, \vec{y}) = 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^k,\ \vec{y} \in \mathbb{R}^m,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

a

$$F_i(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} y_j - x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Pozorujme dále, že

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = a_{ij}$$

Tedy Jacobiho matice zobrazení $\vec{F}(\vec{x}, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ \forall x \in \mathbb{R}^m$ se shoduje s $\mathbb{A}$.
Z lineární algebry víme, že (3) má řešení ($\vec{y}$ lze psát jako funkci $\vec{x}$) pokud

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^m \neq 0.$$

V obecné větě bude hrát nenulový determinant Jacobiho matice význačnou roli, neboť pak funkci lze lokálně aproximovat lineární funkcí (tj. diferenciálem) a koeficienty tohoto lineárního zobrazení jsou právě prvky Jacobiho matice.

Věta 9.29 O implicitních funkcích
Buď $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m) : U \times V \to \mathbb{R}^m$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^k,\ V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené, $\vec{F} \in C^1(U \times V)$.
Nechť $\vec{x_0} \in U$ a $\vec{y_0} \in V$ tak, že

- $\vec{F}(\vec{x_0}, \vec{y_0}) = 0$.
- $\det\left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)(\vec{x_0}, \vec{y_0})\right]_{i,j=1}^m \neq 0$.

Pak existuje $U_\theta \subset U,\ x_0 \in U_\theta$ a právě jedna $\vec{g} : U_\theta \to V$ tak, že

- $\vec{g} \in C^1(U_\theta)$.
- $\vec{F}(\vec{x}, \vec{g}(x)),\ \forall \vec{x} \in U_\theta$.

P o z n á m k a . Pokud poslední rovnost platí, lze již derivovat podle $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ a explicitně spočítat $\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i},\ j = 1, 2, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, k$. Je-li $m = k = 1$, pak z rovnosti $F(x, g(x)) = 0$ plyne

$$\frac{\partial F(x, g(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, g(x))}{\partial y} g'(x) = 0,$$

neboli

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}. \tag{*}$$

Obvykle se $g(x)$ označuje $y(x)$.

Důkaz. Transformací souřadného systému lze uvažovat $(\vec{x_0}, \vec{y_0}) = (\vec{0}, \vec{0})$. Protože $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)(0, 0)$ má nenulový determinant, existuje inverzní matice, označme ji $\Gamma(0, 0)$.
Pro každé $\vec{x} \in U$ definujeme $T_{\vec{x}} : V \to \mathbb{R}^m$

$$T_{\vec{x}}(\vec{y}) = \vec{y} - \Gamma(0, 0) \cdot \vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$$

Ukážeme, že $T_{\vec{x}}$ splňuje předpoklady věty 9.28.

(α) :

$$\begin{aligned}
\left|T_{\vec{x}}\vec{y}^1 - T_{\vec{x}}\vec{y}^2\right|_{E,\mathbb{R}^m} &= \left|\vec{y}^1 - \vec{y}^2 - \Gamma(0,0)\cdot\left[\vec{F}(\vec{x},\vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x},\vec{y}^2)\right]\right| = \\
&= \left|\Gamma(0,0)\cdot\left[\vec{F}(\vec{x},\vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x},\vec{y}^2) - \frac{\partial\vec{F}}{\partial y_j}(0,0)\cdot\left(\vec{y}^1 - \vec{y}^2\right)\right]\right| = \\
&\overset{Lagrange}{=} \|\Gamma(0,0)\|_\infty \left|\frac{\partial\vec{F}}{\partial y_j}(\vec{x},\vec{y}^*) - \frac{\partial\vec{F}}{\partial y_j}(0,0)\right| \left|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\right|_{E,\mathbb{R}^m} \leq \\
&\leq C\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{x},\vec{y}^*) - \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right| \left|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\right|_{E,\mathbb{R}^m}.
\end{aligned}$$

Supremovou normou matice $\|\Gamma(0,0)\|_\infty$ rozumíme její maximální prvek - podrobněji viz učebnice LA). Ze spojitosti $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ plyne

$$(\forall\vec{x}\in U)\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,\left(\forall\vec{y}^1,\vec{y}^2\in U\right): \left|T_{\vec{x}}\vec{y}^1 - T_{\vec{x}}\vec{y}^2\right|_E \leq C\varepsilon\left|\vec{y}^1 - \vec{y}^2\right|_E.$$

Speciálně pro $\varepsilon = \frac{q}{C}$ dostáváme (s $q<1$), že $T_{\vec{x}}$ je kontrakce.

(β) :

$$|T_{\vec{x}}(0)| = \|\Gamma(0,0)\|_\infty\left|\vec{F}(\vec{x},\vec{0})\right| = \|\Gamma(0,0)\|_\infty\left|F(\vec{x},\vec{0}) - F(\vec{0},\vec{0})\right| \leq C\,|\vec{x}| < \tilde{\varepsilon}$$

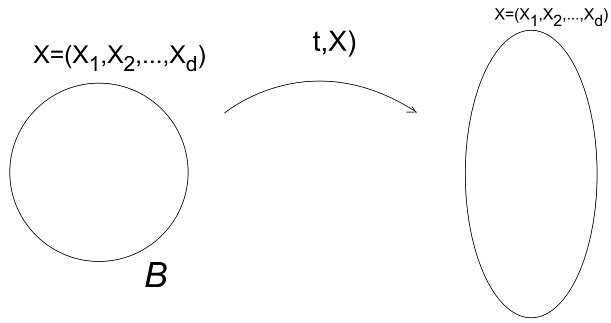
Tak pro $\tilde{\varepsilon} = \delta(1-q),\ \exists\theta,\ \forall x\in U_\theta$ je

$$|T_x(0)| \leq \delta(1-q).$$

Tak pro každé $\vec{x}\in U_\theta(0)$ splňuje $T_{\vec{x}}$ předpoklady věty 9.28, tj. $\forall\vec{x}\in U_\theta(0)$, $\exists!\ \vec{y}\in V_\delta$ tak, že

$$T\vec{y} = \vec{y} \qquad \text{neboli} \qquad \vec{F}(\vec{x},\vec{y}(x)) = 0.$$

Hladkost $\vec{g}$ plyne z hladkosti $\vec{F}$, využijeme-li stejnou argumentaci jako ve větě o derivování složené funkce. Tím je důkaz hotov.



9.7.3 Věta o inverzním zobrazení

V mechanice kontinua se zkoumají deformace těles. Buď $B \in \mathbb{R}^d$ umístění tělesa v čase $t = 0$. Těleso deformujeme a deformaci zachytíme zobrazením

$$\chi(t, \cdot) : B \to B_t.$$

Označme $\vec{x} = \vec{\chi}(t, \vec{X})$. Předpokládáme, že při deformaci nedochází k trhlinám, rozdělení tělesa a že je vzájemně jednoznačná korespondence mezi $\vec{X}$ a $\vec{x}$, neboli zobrazení $\vec{\chi}$ je možné invertovat.
Při popisu se standartně v mechanice kontinua současné souřadnice $\vec{x}$(Eulerův popis) nebo původní souřadnice $\vec{X}$(Lagrangeův popis). Chceme, aby popisy byli ekvivalentní - aby se dobré vlastnosti neztráceli.

Definice. Regulární zobrazení
Buď $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ a $M \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že χ je regulární zobrazení v M pokud

- M je otevřená.
- $\chi \in C^1(M)$.
- $\det\left[\mathrm{D}\chi(x)\right] \neq 0, \ \forall x \in M$.

Věta 9.30 o inverzním zobrazení
Buď $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární a prosté v $M \subset \mathbb{R}^d$. Označme $N = \chi(M)$. Pak $\chi^{-1} : N \to \mathbb{R}^d$ je

(1) regulární.

(2) prosté.

(3) $\det\left(\mathrm{D}\chi(X)\right) \det\left(\mathrm{D}\chi^{-1}\left(\chi(X)\right)\right) = 1$

Důkaz.

(1): Existence χ^{-1} plyne z toho, že χ zobrazuje M na N prostě, navíc je evidentní, že χ^{-1} je prosté.

(2): Regulárnost χ^{-1} plyne z věty o implicitní funkci. Již víme, že rovnice $y = \chi(y)$ je ekvivalentní s $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y) = \chi(x) - y$, což je ekvivalentní s $x = \chi^{-1}(y)$. Je-li $y_0 \in N$, pak existuje $x_0 \in M$ tak, že

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \chi^{-1}(y_0)$$

a podle věty o implicitní funkci existuje otevřené okolí, kde relace $F(x, y) = 0$ platí a $x = \chi^{-1}(y)$. Tedy N je otevřená. Navíc, věta 9.29 implikuje

$$\chi \in C^k(M) \Rightarrow F \in C^k(M \times N) \Rightarrow \chi^{-1} \in C^k(N).$$

(3): Protože $\chi^{-1}(\chi(X)) = X$, věta o derivování složené funkci dává

$$\mathrm{D}\chi^{-1}(\chi(X))\,\mathrm{D}\chi(X) = \mathrm{Id},$$

což implikuje

$$\det\left[\mathrm{D}\chi^{-1}(\chi(X))\right]\det\left[\mathrm{D}\chi(X)\right] = 1.$$

Odtud protože χ je regulární $\det\left[\mathrm{D}\chi(X)\right] \neq 0$ plyne

$$\det\left[\mathrm{D}\chi^{-1}(\chi(X))\right] \neq 0.$$

Důkaz věty je tak hotov.
Nevíme-li (či není-li) χ globálně prosté, pak platí následující věta.

Věta 9.31 *
Buď $\chi \in C^1(U(x_0))$ a $\det \mathrm{D}\chi(x_0) \neq 0$. Pak

(1) existuje $U'(x_0) : \chi$ je prosté v $U'(x_0) \subset U(x_0)$.

(2) $\chi(U'(x_0))$ je otevřená.

(3) $\chi^{-1} \in C^1(\chi(U'(x_0)))$.

(4) platí V 9.30 (3) v $U'(x_0)$.

(5) je-li $\chi \in C^k(U(x_0))$, pak $\chi^{-1} \in C^k(\chi(U'(x_0)))$.

Příklad. Polární souřadnice($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) představují zobrazení z $\mathbb{R}^2_+ = \{(r, \varphi); r > 0, \varphi \in \mathbb{R}\}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ s

$$\det \mathrm{D}\chi(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0$$

a

$$\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^2_+).$$

Nicméně χ není globálně prosté, neboť $\chi(r_0, \varphi_0) = \chi(r_0, \varphi_0 + 2k\pi)$. Uvědomte si rozdíl oproti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.